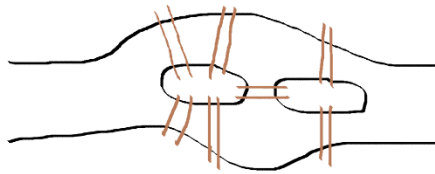


Gráfokkal kapcsolatos alapismeretek

Bevezető feladatok:

- Egy sziget 6 faluját közvetlenül összekötő szárazföldi utakról az alábbiakat tudjuk: C-ből csak E-re nem vezet közvetlen út, A-t és F-et két út köti össze, D-ből E-be is közvetlen út vezet. Ezek az utak nem keresztezik egymást. A szigeten a sűrű növényzet és a sziklák miatt csak az utakon lehet közlekedni.
 - El lehet-e jutni B-ből szárazföldre F-be?
 - El lehet-e jutni B-ből F-be, ha C és F között hóakadály miatt nem lehet közlekedni?
 - El lehet-e jutni B-ből E-be, ha D és E között hóakadály miatt nem lehet közlekedni?
- 1736-ban Leonard Euler (1707-1783) svájci matematikus írta a legelső, gráfelméleti tárgyú matematikai munkát. A dolgozat megszületését tulajdonképpen a XVIII. századi Königsberg város polgárainak köszönheti. A várost átszelő Pregel folyón hét híd vezetett, az ábrán látható módon. A város lakói azzal a kérdéssel fordultak Eulerhez, hogy lehet-e olyan sétát tenni, amely közben valaki a lakásából indulva minden hídon átsétál, majd hazaérkezik úgy, hogy egyik hídon sem ment át egynél többször. Vajon lehet?



Gráf: pont, él foksám:

Def.: Gráfnak nevezzük pontoknak és éleknek a halmazát, ahol az élek pontokat kötnek össze, illetve az élekre pontok illeszkednek úgy, hogy minden élre legalább egy, legfeljebb két pont illeszkedik.

Def.: A gráf egy pontjába összefutó élek számát a pont foksámának (fokának) nevezzük.

Def.: Ha egy pontban nincs él, akkor azt izolált pontnak nevezzük, foksáma 0.

Többszörös él, hurokél:

Def.: Ha két pontot két vagy több él köti össze, akkor ezeket párhuzamos (vagy többszörös) éleknek nevezzük.



Ha egy élre egy pont illeszkedik, azaz egy él két végpontja azonos, akkor azt az élt hurokélnek nevezzük.



→ A hurokél kettővel növeli a foksámot.

Def.: Ha egy gráfban nincsenek párhuzamos élek és nincs hurokél, akkor azt egyszerű gráfnak nevezzük.

- (É) Egy hat tagú társaságban a házigazda mindenkit ismer, négy vendégének pontosan két ismerőse van a társaságból. Az ismeretségek kölcsönösek. Ábrázold gráffal az ismeretséget.
- (É) Egy irodai számítógép-hálózat hat gépből áll. Mindegyik gép ezek közül három másikkal van közvetlenül összekötve. Rajzolj egy olyan gráfot, amely ezt a hálózatot szemlélteti!

5. Rajzolj olyan ötpontú egyszerű gráfot, amelyben a csúcsok fokszámai:

- 1; 1; 2; 2; 2
- 0; 1; 1; 1; 3
- 1; 1; 1; 1; 2.

A fenti gráfok esetében add meg a fokszámok összegét és az élek számát! Mit tapasztalsz?

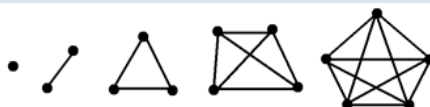
Fokszámok összege és élek száma közötti összefüggések:

Tételek:

- (1) Bármely gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszerese.
- (2) Minden gráfban a pontok fokszámának összege páros szám.
- (3) Bármely gráfban a páratlan fokszámú pontok száma páros.

Teljes gráf:

Def.: Egy egyszerű gráfot teljes gráfnak nevezünk, ha bármely két pontja össze van kötve éllel.



Az egy izolált pontból álló gráf is teljes gráf.

Tétel: Az n pontú teljes gráfnak $\binom{n}{2}$ éle van.

Összefüggő gráf, komplementer gráf:

Def.: Összefüggőnek nevezünk egy gráfot, ha bármely pontjából bármely pontjába el lehet jutni az élek mentén.

A nem összefüggő gráf részeit komponenseknek nevezzük.

Def.: Egyszerű gráf komplementere olyan egyszerű gráf, amelynek pontjai az eredeti gráf pontjai, élei pedig azok az élek, amelyek nincsenek benne az eredeti gráfban.

6. Jellemezd az alábbi gráfokat a megadott szempontok szerint!

Van-e benne hurokél?				
Van-e benne párhuzamos él?				
Van-e benne izolált pont?				
Egyszerű gráf-e?				
Teljes gráf-e?				
Összefüggő gráf-e?				
Mennyi a pontok fokszámainak az összege?				
Mennyi éle van?				

7. Létezik-e olyan ötpontú egyszerű gráf, amelynek fokszámai

- a. 1; 2; 2; 2; 3
- b. 1; 1; 2; 2; 4
- c. 1; 2; 3; 3; 4
- d. 1; 3; 3; 4; 5?

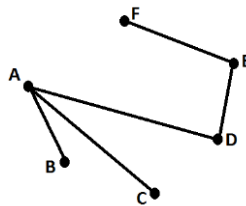
Ha létezik, akkor rajzold le a gráfot, ha nem létezik, akkor pedig indokold meg, hogy miért nem!

8. Létezik-e olyan nyolcpontú egyszerű gráf, amelyben a foksámok rendre

- a. 2;2;3;3;4;6;6;8
- b. 1;2;3;4;5;5;5;6
- c. 0;1;2;3;3;4;4;7
- d. 1;2;3;3;5;6;7;7
- e. 1;1;3;4;6;7;7;7?

Ha létezik, akkor rajzold le a gráfot, ha nem létezik, akkor pedig indokold meg, hogy miért nem!

9. (É) Iskolák közötti labdarugó-bajnokságra jelentkezett 6 csapat között lejátszott mérkőzéseket szemlélteti az ábra. Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik a bajnokságban?



10. (É) Októberben az iskolában nyolc osztály nevezett be a focibajnokságra egy-egy csapattal. Hány mérkőzést kell lejátszani, ha mindenki mindenkivel játszik és szerveznek visszavágókat is?

11. (É) A városi középiskolás egyéni teniszbajnokság egyik csoportjába hatan kerültek: András, Béla, Csaba, Dani, Ede és Feri. A versenykiírás szerint bármely két fiúnak pontosan egyszer kell játszania egymással. Eddig András már játszott Bélával, Danival és Ferivel. Béla játszott már Edével is. Csaba csak Edével játszott, Dani pedig Andráson kívül csak Ferivel. Ede és Feri egyaránt két mérkőzésen van túl.

- a. Szemléltesd gráffal a lejátszott mérkőzéseket!
- b. Hány mérkőzés van még hátra?
- c. Hány olyan sorrend alakulhat ki, ahol a hat versenyző közül Dani az első két hely valamelyikén végez?

12. (É) Egy focicsapat 11 játékosa megérkezik az edzésre, néhányan kezet fognak egymással. (Két játékos között legfeljebb egy kézfogás történik.) Az edző felírta, hogy ki hányszor fogott kezet, és a következő számokat kapta: 0; 1; 2; 2; 2; 5; 0; 0; 4; 4; 2.

- a. Ábrázold a kézfogásoknak egy lehetséges gráfját, ahol a pontok a játékosokat jelölik, és két pont között akkor van él, ha az illetők kezet fogtak az edzés előtt!
- b. Hány kézfogás történt összesen?

13. **(É)** Egy iskola asztalitenisz bajnokságán hat tanuló vesz részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig Andi egy mérkőzést játszott, Barnabás és Csaba kettőt-kettőt, Dani hármat, Enikő és Feri négyetnégyet.
- a. Rajzold le az eddig lejátszott mérkőzések egy lehetséges gráfját!
 - b. Lehetséges-e, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta? (Igen válasz esetén rajzolj egy megfelelő gráfot; nem válasz esetén válaszod részletesen indokold!)
14. Igaz-e, hogy bármely nyolc tagú társaságban van két olyan ember, akiknek a társaságban ugyanannyi ismerőse van? (Az ismeretség kölcsönös, az ember önmagának nem ismerőse.)
15. Rajzold le azt a gráfot, amelynek pontjai a természetes számok 0-tól 10-ig, és egy a számból nyíl mutat b -be, ha a osztója b -nek. Melyik az a szám, amelyből az összes számba mutat nyíl? Melyik az a szám, amelybe az összes számból mutat nyíl?

Def.: Irányított gráfnak nevezzük a pontokból és pontpárokat összekötő irányított vonalakból álló alakzatokat. Ennek éleit irányított éleknek nevezzük.