

Sorozatok határértéke

ÖSSZEFOGLALÁS, GYAKORLÁS

Összeállította: Bölcsföldi Tünde (bolcsfoldi-
matek.webnode.hu)

Érettségi követelmények (2017. január 1-től hatályos):

- ▶ Bizonyítási módszerek és bemutatásuk tételek bizonyításában (**24. tétel**)
 - ▶ Direkt bizonyítás
 - ▶ Indirekt bizonyítás
 - ▶ Teljes indukció
 - ▶ Skatulya-elv
- ▶ Sorozatok (**8. tétel**)
 - ▶ Számsorozat fogalma, megadása
 - ▶ Sorozatok jellemzése korlátosság és monotonitás szempontjából
 - ▶ Konvergencia fogalma
 - ▶ Határérték művelettartása
 - ▶ Végtelen mértani sor fogalma, összege
 - ▶ Számítási és mértani sorozat fogalma, általános tagja (bizonyítással) és összegképlete (bizonyítással)

Elméleti kérdések:

Válaszoljon az alábbi kérdésekre!

1. Fogalmazza meg a számsorozat definícióját!
2. Hogyan adhatunk meg sorozatokat?
3. Milyen sorozatokat nevezünk mértani sorozatoknak?
4. Mikor nevezünk egy sorozatot
 - ▶ felülről korlátosnak;
 - ▶ alulról korlátosnak;
 - ▶ korlátosnak?
5. Mikor nevezünk egy sorozatot
 - ▶ monoton növekvőnek;
 - ▶ monoton csökkenőnek?



6. Fogalmazza meg a sorozat határértékének fogalmát!

7. Mit jelentenek az alábbi kifejezések:

- ▶ konvergens;
- ▶ divergens;
- ▶ valódi divergens?

8. Fogalmazza meg a határérték unicitására (egyértelműségére) vonatkozó tételt!

9. Milyen kapcsolata van a konvergenciának a korlátossággal és monotonitással?

10. Fogalmazza meg a Rendőr-elvnek nevezett tételt!

11. Fogalmazza meg a konvergens sorozatok művelettartására vonatkozó tételt!

12. Mit nevezünk sornak?

13. Mikor nevezünk egy sort konvergensnek? Mit értünk egy sor összegén?

14. Mikor nevezünk egy sort mértani sornak?

15. Mikor van a mértani sornak összege? Hogyan határozható meg ez az összeg?

Feladatok:

1. Igazoljuk minden pozitív egész számra, hogy

a) $4 \mid 7^n + 3^{n+1}$

b) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

2. Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat korlátosság és monotonitás szempontjából:

a) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{3n^2}$

b) $b_n = \frac{1+2+\dots+n}{(n+1)(n+5)}$

3. Az alábbi sorozatoknak határozzuk meg a határértékét és adjuk meg az ε -hoz tartozó küszöbszámot!

a) $a_n = 1 + \frac{1}{n^2} \quad \varepsilon = 0,01$

b) $b_n = \frac{n+2}{2n-8} \quad \varepsilon = 10^{-4}$

4. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n - 1}{2n^3 - 5}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n}{n^4 + 5n - 4}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 7}{n + 2}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-5}{n}\right)^{3n}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+3} - 1}{2^n}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n+1}}{4^{n-1}}$

5. Írjuk fel a $2,1\dot{3}\dot{4}$ tizedestörtöt közös nevezőre hozott tört alakban!

6. Az egységnyi oldalhosszúságú négyzet szomszédos oldalainak felezőpontjait kössük össze egyenes szakaszokkal. Négyzetet kapunk. Ennek oldalait újból felezzük meg, és a szomszédos oldalak felezőpontjait kössük össze. Ismét négyzetet kapunk. Folytassuk gondolatban megállás nélkül az eljárást! Számítsuk ki az összes négyzet területének az összegét!

Versenypeladatok:

1. Oldja meg az $x^2 + y^2 - 8z = 14$ egyenletet az egész számok halmazán!
2. Legyenek x és y olyan pozitív egészek, amelyek eleget tesznek a $4y^2 - 9x^2 = 2007$ egyenletnek. Mennyi az összes összetartozó x és y érték szorzatának legnagyobb prím osztója?
3. Oldja meg az $x^2y^2 - 7xy^2 + 10y^2 + 44xy - 154y + 484 = 0$ egyenletet, ha x és y pozitív prímszámok!