

Számтан, algebra

Hatvány, gyök, logaritmus

11. évfolyam - Matematika 4333

n-edik gyök; tört kitevőjű hatványok; exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek; a logaritmus fogalma, azonosságai, értelmezési tartománya; logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek; exponenciális egyenletek megoldása logaritmussal; gyakorlati alkalmazások

1. A gyökvonás azonosságainak felhasználásával hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^{-4}}} \cdot \sqrt[6]{\frac{b^{-2}}{a^{-3}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt{\frac{a^5}{b^3}}.$$

2. Írd fel 2 hatványaként a következő kifejezés értékét: $\frac{\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-1} \cdot 32}{\sqrt[4]{2^3} \cdot 2^{\frac{6}{5}}}.$

3. Oldd meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a. $5^{x^2-3x-4} = 1$

b. $7^{2x-3} \cdot \frac{7^x}{7^{x-5}} = 49^{1-x}$

c. $3^x + 3^{x+2} + 3^{x-1} = \frac{31}{3}$

d. $25^x + 5 = 6 \cdot 5^x$

4. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a. $4 \cdot \sqrt[3]{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$

b. $\left(\frac{7}{11}\right)^{x^2-12} \geq \left(\frac{7}{11}\right)^x$

c. $3^{\frac{x+1}{x-2}} < 9$

5. Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!

a.
$$\begin{cases} 3 \cdot 5^x - 2^y = 7 \\ 2 \cdot 5^x + 3 \cdot 2^y = 34 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 5^{2x} \cdot 5^y = 5^5 \\ 6^{x-y} = 6 \end{cases}$$

6. A logaritmus definíciója alapján határozd meg az alábbi kifejezések értékét:

a. $\log_6 36;$

Számтан, algebra

Hatvány, gyök, logaritmus

11. évfolyam - Matematika 4333

- b. $\log_9 \frac{1}{3}$;
c. $\log_{\sqrt{2}} 8$.
7. Számítsd ki a következő hatványok értékét:
a. $3^{\log_3 7}$;
b. $9^{\log_3 7}$;
c. $3^{\log_9 49}$.
8. Számítsd ki a következő kifejezés pontos értékét:
 $\log_3 \sqrt{45} + \frac{1}{2} \log_3 20 + \log_3 6 - \log_3 30 - \log_3 2$
9. Oldd meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:
a. $\log_3(x-4) + \log_3(x-2) = 1$
b. $\lg(x-3) + \lg(x+4) = \lg(5x+9)$
c. $\lg^2 x - 4\lg x + 3 = 0$
10. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:
 $\log_{0,3}(x^2 - 4x + 3) \leq \log_{0,3}(11 - 2x)$
11. Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!
a.
$$\begin{cases} 5 \cdot \log_2 x - 3 \cdot \log_3 y = 9 \\ 2 \cdot \log_2 x + \log_3 y = 8 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 2 \\ x - y = 12 \end{cases}$$
12. Ha T_0 összeget évi $p\%$ -os kamatos kamattal befektetünk, akkor n év elteltével
$$T_n = T_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$
 összeget vehetünk fel. Befektettünk 1 000 000 Ft-ot. Mennyi idő múlva duplázódik meg a pénzünk évi 8%-os kamatláb mellett, feltéve, hogy közben nem veszünk ki belőle és a kamatláb sem változik?
13. Hangfelvételi ismereteket közöl egy internetes weboldal. Egy szó szerint idézett részlet:
„... A hangrögzítésben a hangdinamika a legerősebb hangjel (mely még torzítás nélkül rögzíthető) és a készülékben keletkező alappaj aránya. Ennek az aránynak a logaritmusával számolunk, mely a decibel: $20 \cdot \lg(\text{jel} / \text{zaj})$”
Eltekintve a meglehetősen zavaros szöveges „definíciótól”, a megadott képlet alapján meghatározható a jel/zaj arány, ha a „hangdinamika” 40 decibel. Mekkora ez az arány?